数理解析研究所講究録 1309 巻 2003 年 173-180

Oscillation criteria for nonlinear difference equations

島根大学 総合理工学部　杉江　実郎 (Jitsuro Sugie)
島根大学 総合理工学研究科　小野　裕司 (Yuji Ono)
Department of Mathmatics
Shimane University

時間遅れをもつ非線形差分方程式

$$x(n+1)-x(n)+p(n)g(x(n-k))=0 \tag{1}$$

の解の振動問題について考える。ただし，$p(n)$ は各項が非負である数列とし，$g(x)$ は

$$xg(x)>0 \qquad \text{if } x\neq 0 \tag{2}$$

を満たすような連続実数値関数とする。また，k は 1 以上の整数である。方程式 (1) に対する解を得るためには，初期値として，$k+1$ 個の値 $x(-k), x(1-k), x(2-k), \cdots, x(0)$ が必要である。即ち，$k+1$ 個の初期値を与えたとき，方程式 (1) を満たすような，任意の $n\geq 1$ に対する数列 $\{x(n)\}$ が一意的に決まる。この数列のことを方程式 (1) の解と呼ぶ。方程式 (1) の非自明な解 $\{x(n)\}$ が振動するとは，任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して $x(n)x(n+1)\leq 0$ となるような $n\geq N$ が存在することである。一方，解 $\{x(n)\}$ が振動しない解であるとは，任意の $n\geq N$ に対して $x(n)x(n+1)>0$ となるような N が存在することである。

方程式 (1) の非線形項が $g(x)=x$ であるような場合，方程式 (1) は線形差分方程式

$$x(n+1)-x(n)+p(n)x(n-k)=0 \tag{3}$$

になる。方程式 (3) の解の振動問題に関する結果は非常に多い ([1–4, 6, 8])。これらの先駆的な研究として挙げられるのが，Erbe and Zhang [2] と Ladas, Philos and Sficas [4] である。まず，Erbe and Zhang [2] は次のような結果を示した。

Theorem A. $p(n)$ が

$$\liminf_{n\to\infty} p(n) > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{4}$$

を満たすならば，方程式 (3) のすべての解が振動する。

Theorem B. $p(n)$ が

$$\sup p(n) \leq \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{5}$$

を満たすならば，方程式 (3) は振動しない解をもつ。

Theorem A と Theorem B から，方程式 (3) のすべての解が振動するための係数項 $p(n)$ に対する臨界値は $k^k/(k+1)^{k+1}$ であることが分かる。次に，Ladas, Philos and Sficas [4]

は，k 個の $p(n)$ の相加平均の値に注目することによって，Theorem A と Theorem B を次のように拡張した。

Theorem C. 係数項 $p(n)$ が

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i) > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{6}$$

を満たすならば，方程式 (3) のすべての解は振動する。

Theorem D. 係数項 $p(n)$ が

$$\sup \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i) \leq \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{7}$$

を満たすならば，方程式 (3) は振動しない解をもつ。

以後，線形方程式 (3) の解の振動条件に関しては，条件 (6) が成り立たない場合についての議論が盛んに行われ，多くの成果が報告されている ([5, 6, 8, 9])。しかし，残念ながら，方程式 (3) の非振動解の存在性に関する研究については，ほとんど進展していないのが現状である。1999 年に，Tang and Yu [8] は，係数項 $p(n)$ が

$$\sum_{i=n-k}^{n} p(i) \leq \frac{1}{e} \tag{8}$$

を満たすならば，方程式 (3) には振動しない解が存在することを主張しているが，その証明は，詳しく与えられていない。

一方，非線形差分方程式 (1) の解の振動問題に関する結果は，Erbe and Zhang [2] によって得られている。彼らは，非線形関数 $g(x)$ に対して，条件 (2) に加えて

$$\liminf_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = L, \qquad 0 < L < \infty \tag{9}$$

を仮定した。このとき，得られた結果が次の定理である。

Theorem E. 非線形関数 $g(x)$ が (2) と (9) を満たし，係数項 $p(n)$ が

$$\liminf_{n\to\infty} p(n) = \underline{p}$$

を満たすと仮定する。このとき

$$\underline{p}L > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{10}$$

ならば，方程式 (1) の非自明なすべての解は振動する。

明らかに，Theorem E は Theorem A に対応した結果である。しかし，Theorem B に対応するような方程式 (1) の非振動解の存在定理については得られていない。さらに，彼らの結果は，非線形関数が

$$g(x) = |x|^{1-\delta} \operatorname{sgn} x, \qquad 0 < \delta < 1$$

であるような場合には適用できない。これは，条件 (9) において，L が有限値であることを仮定しなければならないからである。以後，Tang and Yu [9] は，条件 (10) を改善するような結果を報告しているが，前述の 2 つの課題は未解決のままである。

本研究の 1 つ目の目的は，上記のような問題を解決することである。上記のような問題が生じる主な要因は，従来の証明法において解の動き方を厳密に考えていないからである。よって，新たな証明法として相平面解析を提案する。即ち，x–y 平面上で方程式 (1) の解の挙動を調べる。このため，新たに

$$y(n) = x(n+1) \tag{11}$$

を満たすように数列を定義することによって，方程式 (1) を同値な方程式系

$$\begin{aligned} \Delta x(n) &= x(n-1) - y(n-1) \\ \Delta y(n) &= -p(n)g(x(n-k)) \end{aligned} \tag{12}$$

に変換する。ただし，$\Delta x(n) = x(n) - x(n-1)$ ，$\Delta y(n) = y(n) - y(n-1)$ を意味する。このとき，方程式系 (12) の解とは，k 個の初期点 $(x(-1), y(-1))$，$(x(-2), y(-2))$，$\cdots$，$(x(-k), y(-k))$ を与えることによって，方程式系 (12) を満たしながら一意に定まる数列の組 $\{(x(n), y(n))\}$, $n \geq 0$ に対応する。また，方程式系 (12) の解を x–y 平面上で表現すると点列 $\{P_n\}$ が与えられる。ただし，P_n は

$$P_n = (x(n), y(n)), \qquad n \geq -k$$

である。この点列 $\{P_n\}$ のことを方程式系 (12) の解軌跡と呼ぶ。

後述の Theorems 1–3 の証明の主な方針は，方程式系 (12) の解軌跡の点 P_n と原点を通る直線の傾きを表す数列 $\{\mu(n)\}$ の変化を調べることである。この数列 $\{\mu(n)\}$ と別の数列を比較する操作を行うことが，上記の問題点を解決する重要な発想である。Theorem 1 に対しては，背理法によって矛盾を導くため，終局的に正でない数列と比較する。Theorems 2–3 に対しては，終局的に正である数列と比較することによって，振動しない解を構成できることを示す。この手法によって得られた結果は以下のとおりである。

Theorem 1. 任意の $n \geq N_1$ に対して

$$p(n) \geq p_* \tag{13}$$

となる $p_* > 0$ と，絶対値が十分小さな任意の x に対して

$$\frac{g(x)}{x} \geq \lambda \tag{14}$$

となる λ が存在し，p_* と λ が

$$p_*\lambda > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{15}$$

を満たすならば，方程式 (1) の非自明なすべての解は振動する。

Theorem 2. 任意の $n \geq N_2$ に対して

$$p(n) \leq p^* \tag{16}$$

となる $p^* \geq 0$ と，絶対値が十分小さな正 (または負) の x に対して

$$\frac{g(x)}{x} \leq \lambda \tag{17}$$

を満たす λ が存在し，p^* と λ が

$$p^*\lambda \leq \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{18}$$

を満たすならば，方程式 (1) は非自明な振動しない解をもつ。

Theorem 2 は方程式 (1) に対する非振動解の存在定理であるから，前述の 1 つ目の課題が解決されたことになる。また，Theorem 1 は Theorem E の欠点を補う結果であることを次の例で示すことができるので，2 つ目の課題にも答えることができた。

Example 1. 差分方程式

$$x(n+1) - x(n) + \sqrt{|x(n-1)|}\mathrm{sgn}x(n-1) = 0 \tag{19}$$

の解の振動性を調べる。

前述のとおり，方程式 (19) に対して Theorem E を適用することはできない。なぜなら，非線形項が $g(x) = \sqrt{|x|}\mathrm{sgn}x$ より

$$\frac{g(x)}{x} = \liminf_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x|}\mathrm{sgn}x}{x} = \infty$$

となるからである。しかし，任意の定数 λ に対して

$$\frac{\sqrt{|x|}\mathrm{sgn}x}{x} > \lambda, \qquad |x| < \varepsilon$$

を満たすような ε が存在する。したがって，$\lambda > k^k/(k+1)^{k+1}$ とおくことによって，Theorem 1 の条件 (14) が満たされる。また，$p(n) \equiv 1$ であるから，$p_* = 1$ とおけば，係数項に関する条件 (13) も満たされる。このとき

$$p_*\lambda > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

となるから，条件 (15) も成り立つ。故に，Theorem 1 から方程式 (19) のすべての解は振動する。

Theorem 1 と Theorem 2 を合わせて考えれば，方程式 (1) のすべての解が振動するための条件に対しても，$k^k/(k+1)^{k+1}$ が臨界値の役割を果たすことが分かる。このことから，時間遅れ k は方程式 (1) の解の振動性を促進する働きをもつことが分かる。即ち，

時間遅れ k が大きくなるにつれて，方程式 (1) の解は振動し易くなる。それは解の振動性の臨界値 $k^k/(k+1)^{k+1}$ が，$k \to \infty$ のとき

$$\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \frac{1}{k+1} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^k \frac{1}{k+1}$$
$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \frac{1}{k+1} \to 0$$

となるからである。一方，時間遅れがない場合，即ち，$k=1$ のときは，条件 (18) は方程式 (1) のすべての解が振動しないための十分条件となる。ただし，非線形関数 $g(x)$ に対する条件を強めなければならない。

Theorem 3. $k=1$ とする。関数 $g(x)$ が条件 (16) を満たし，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{g(x)}{x} \le \lambda \tag{20}$$

が成り立つとする。このとき

$$p^*\lambda \le \frac{1}{4} \tag{21}$$

を満たすならば，方程式 (1) のすべての解は振動しない。

以下では，Theorem 1 と Theorem 3 を比較できるような例を考える。これらの例によって，時間遅れが解の振動性に本質的な役割を果たしていることを理解できる。まず，時間遅れがない例を与える。

Example 2. 差分方程式

$$x(n+1) - x(n) + \frac{1}{16}(x(n-1) + 3\sin x(n-1)) = 0 \tag{22}$$

を考える。このとき，$p^* = 1$，$\lambda = 1/4$ とおくことによって，条件 (16)，(20) と (21) が満たされることを確認できる。まず，係数項が $p(n) \equiv 1$ より，条件 (16) が成り立つ。また，非線形項は

$$g(x) = \frac{1}{16}(x(n-1) + 3\sin x(n-1))$$

と考えてよいから，仮定 (2) が満たされることに加え，$x \neq 0$ のとき

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{16}\left(1 + \frac{3\sin x}{x}\right) \le \frac{1}{4} \tag{23}$$

であることも分かる。故に，条件 (20) も成りたつ。さらに，p^* と λ の決め方から，明らかに条件 (21) も満たされる。したがって，Theorem 3 より，方程式 (22) の非自明なすべての解は振動しない。

次に，係数項 $p(n)$ と非線形項 $g(x)$ はそのままで，時間遅れ k だけを変える例を考える。

Example 3. 差分方程式

$$x(n+1)-x(n)+\frac{1}{16}(x(n-2)+3\sin x(n-2))=0 \tag{24}$$

を考える。このとき，$p_*=1$，$\lambda=1/5$ とおく。このとき，条件 (13)，(14) と (15) が満たされることを確認する。Example 2 と同様，係数項が $p(n)\equiv 1$ より，条件 (13) は成り立つ。また，絶対値が十分小さな任意の x に対して

$$\frac{g(x)}{x}>\frac{1}{5}=\lambda$$

であることも分かる。実際，$x=\pi/3$ のとき

$$\frac{g(x)}{x}=\frac{1}{16}+\frac{9\sqrt{3}}{32\pi}\approx 0.217561252$$

となり，条件 (14) は $|x|\le\pi/3$ において成り立つ。さらに，時間遅れ $k=2$ であることに注意すると

$$p_*\lambda=\frac{1}{5}>\frac{4}{27}=\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

より，条件 (15) も満たされる。したがって，Theorem 1 より，方程式 (24) の非自明なすべての解は振動する。

上の 2 つの例から分かるように，Example 2 のようにすべての解が振動しない状態が，時間遅れの出現によって劇的に変化し，Example 3 のようにすべての解が振動してしまうことがある。

さて，本研究の 2 つ目の目的は，Theorem 1 と Theorem 2 をさらに拡張することである。振動定理に対しては，Theorem 1 の係数項の条件を (6) のような k 個の $p(n)$ の相加平均の形に改善することを考える。この問題に対しても，相平面解析を活用することによって，次のような結果を得ることができた。

Theorem 4. 十分大きな n に対して

$$\frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}p(i)\ge\ p_*$$

となるような $p_*>0$ と，絶対値が十分小さな任意の x に対して

$$\frac{g(x)}{x}\ge\lambda$$

となるような $\lambda>0$ が存在し

$$p_*\lambda>\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

を満たすならば，方程式 (1) の非自明なすべての解は振動する。

Theorem 4 は，方程式 (3) に対する Theorem C に対応する結果である。よって，非振動解の存在性に関する Theorem 2 の拡張に対しても，方程式 (3) に対する Theorem D に対応する結果を考えることは自然である。しかし，これは今後の課題の 1 つとする。本研究では，別の視点から Theorem 2 を拡張する結果を示す。このために，曲線

$$\psi(u)=\frac{1}{k+1}\left\{1-\left(\frac{k+1}{k}\right)^k u\right\}^k$$

を定義し，領域 Ω を

$$\Omega=\left\{(u,v):\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}\le u\le\left(\frac{k}{k+1}\right)^k,\ \ 0\le v\le\psi(u)\right\}$$

とおく。この領域を用いて以下の定理を得ることができた。

Theorem 5. 定数 γ_1 と γ_2 が

$$(\gamma_1,\gamma_2)\in\Omega$$

を満たすとする。また，絶対値が十分小さい x に対して

$$\frac{g(x)}{x}\le\lambda \tag{25}$$

を満たすことに加え，任意の $n\ge N$ に対して

$$p(n)\lambda\le\gamma_1, \tag{26}$$

となるような自然数 N が存在するとする。このとき，任意の $m=0,1,2,\cdots$ に対して

$$p(N+m(k+1)+i)\lambda\le\gamma_2,\qquad i=1,2,\cdots,k \tag{27}$$

であるならば，方程式 (1) は振動しない解をもつ。

Theorem 5 は Theorem 2 を拡張した結果であるだけでなく，線形差分方程式 (3) に対しても適用することができる。この場合，条件 (7)，(8) を満たさない場合においても効力をもつ。最後に，このことを具体例によって示す。

Example 4. 差分方程式

$$x(n+1)-x(n)+p(n)x(n-2)=0 \tag{28}$$

を考える。ただし，係数項 $p(n)$ は $n=0,1,2,\cdots$ に対して

$$p(3n)=\frac{4}{9},\qquad p(3n+1)=0,\qquad p(3n+2)=0$$

とする。Theorem D をはじめとする従来の非振動解の存在定理では，方程式 (28) が振動しない解をもつことは示せない。なぜなら，時間遅れが $k=2$ であることに注意すると

$$\sum_{i=n-k}^{n-1}p(i)=\frac{4}{9}+0>\frac{8}{27}=\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}$$

より，条件 (7) は満たされないからである。また

$$\sum_{i=n-k}^{n} p(i) = \frac{4}{9} + 0 + 0 = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k > \frac{1}{e}$$

であるから，条件 (8) も満たさない。したがって，過去の結果から方程式 (28) の非振動解が存在するかどうかを判定することはできない。このような状況に対しても Theorem 5 は有効であることを確認する。この場合，$\gamma_1 = 4/9$，$\gamma_2 = 0$ とおく。このとき，点 (γ_1, γ_2) は，領域 Ω 内に存在することが分かる。また，条件 (26)，(27) も成り立つ。したがって，Theorem 5 から，方程式 (28) の非振動解が存在する。実際，初期値を

$$x(-2) = x(-1) = x(0) = 1$$

としたとき，方程式 (28) の解は

$$x(n) = \left(\frac{5}{9}\right)^{[\frac{n-1}{3}]+1}$$

であることが分かる。この解は任意の n に対して正となるような非振動解である。

REFERENCES

[1] S.N. Elaydi, “An Introduction to Difference Equations 2nd ed.”, Springer-Verlag, New York/Berlin/Heidelberg (1999).

[2] L.H. Erbe and B.G. Zhang, *Oscillation of discrete analogues of delay equations*, Differential Integral Equations, **2** (1989), 300–309.

[3] I. Gyori and G. Ladas, “Oscillation Theory of Delay Differential Equations”, Clarendon Press, Oxford (1991).

[4] G. Ladas, Ch.G. Philos and Y. G. Sficas, *Sharp condition for the oscillation of delay difference equations*, J. Appl. Math. Simulation 2 (1989), 101–112.

[5] Zhiguo Luo and Jianhua Shen, *New oscillation criteria for delay difference equations*, J. Math. Anal. Appl., **264** (2001), 85–95.

[6] J. Shen and I. P. Stavroulakis, *Oscillation criteria for delay difference equations*, Electron. J. Differential Equations., **10** (2001), 1–15.

[7] J. Sugie and Y. Ono, *Phase plane analysis in oscillation theory of nonlinear delay difference equations*, preprint.

[8] X.H. Tang and J.S. Yu, *A further result on the oscillation of delay difference equations*, Comput. Math. Appl., **38** (1999), 229–237.

[9] X.H. Tang and J.S. Yu, *Oscillation of nonlinear delay difference equations*, J. Math. Anal. Appl., **249** (2000), 476–490.